

В конце есть содержание для удобной навигации по билетам
Все замечания и предложения присылать vk.com/k.litskevich

1

Вероятностное пространство. Операции над событиями. Свойства вероятности.

Случайное событие - исход (результат эксперимента, наблюдения), который может произойти или не произойти.

Достоверное событие - событие, которое всегда происходит. Ω

Невозможное событие - никогда не происходит. $\emptyset$

$\bar{A}$ - событие, противоположное событию A - A происходит $\Leftrightarrow A$ не происходит

Объединение $A \cup B$ событий

Пересечение $A \cap B$ (или AB)

Разность $A \setminus B$

если $AB = \emptyset$ A и B несовместимы
 $A \subseteq B$: A входит за собой B , если
 A произошло $\Rightarrow B$ произошло

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, будем говорить что A и B равнозначны. $A = B$

В каждой модели рассматриваем основное множество $\Omega = \{\omega\}$ элементарных исходов ω . Событиями называются некоторые его подмножества $A \subseteq \Omega$.

Всего из основного Ω рассматриваются не все подмножества, а лишь некоторые классы подмножеств - σ -алгебры.

Класс $\mathcal{A}$ подмножеств $\omega \in \Omega$ называется алгеброй множеств, если

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$ 2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Алгебра $\mathcal{A}$ наз. σ -алгеброй, если $A_n \in \mathcal{A}$ $n=1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,
 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Тройку $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где Ω - ω и ω исход, $\mathcal{A}$ - σ -алгебра ω и ω в Ω ,

$P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ - вероятность образует вероятностное пространство,

если выполнены аксиомы 1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ (нормированность P)

2) $P(\Omega) = 1$ (нормированность P) 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если $AB = \emptyset$ (аддитивность P)

4) Если $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ (непрерывность P)

Умножив левую и правую вероятности:

$$1) A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

$$2) A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$3) \forall A \in \mathcal{A} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$4) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$5) P(\emptyset) = 0$$

$$6) P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k), \text{ если } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$7) P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

$$\text{Д-во: } P(A_1 \cup A_2 \setminus A_1 \cup \dots \cup (A_n \setminus (A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}))) = \sum_{k=1}^n P(A_k \setminus (A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (\text{т.к. } A_k \setminus (A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \subseteq A_k)$$

$$8) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad \forall A, B$$

$$3^*) A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Тер $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ \Leftrightarrow 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$

$$\text{Д-во: } \Leftrightarrow \text{Обозначим } B_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k + B_n \Rightarrow P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Иногда можно и } B_n: B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

$$\text{обозначим } A_n = B_n \setminus B_{n+1}. \text{ Тогда } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \text{ и } B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

$$\Rightarrow P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \quad (\text{т.е. ряд сходится}) \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = P(B_n) \rightarrow 0 \quad \text{т.д.}$$

Непрерывность вероятности:

$$\text{Если } A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \text{ или } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right).$$

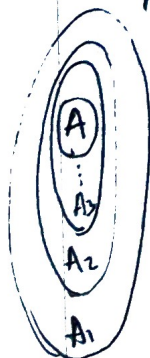
$$\text{Д-м же } A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \text{ тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

$$A_n = A \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup \dots$$

$$\text{т.к. } (A_i \setminus A_{i+1}) \cap (A_j \setminus A_{j+1}) = \emptyset \quad \text{if } i \neq j \text{ и } (A_i \setminus A_{i+1}) \cap A = \emptyset$$

$$P(A_n) = P(A) + \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1}) \quad \text{т.к. } \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1}) \text{ сходится}$$

$$\text{его можно отбросить} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$



Условная вероятность. Независимость событий. Критерий независимости.

Условная вероятность события A при условии [исполнилось событие] B

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (\text{Другое обозначение } P_B(A))$$

Зафиксируем B , можно определить новую вер. меру $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$.
(проверить аксиомы со стр 1)

$P(AB) = P(B) P(A|B)$ называют теоремой умножения (удобно, если $P(A|B)$ задано ранее, чем $P(AB)$)

Более общее теорема умножения: Пусть $A_1, \dots, A_n: P(A_1 \dots A_n) > 0$, тогда

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}).$$

$A, B: P(B) > 0 \Rightarrow \exists P(A|B)$. Если $P(A|B) = P(A)$, то говорим A не зависит от B

Если и $P(A) > 0$, то $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = P(B)$ т.е. внезависит A

т.е. независимость - симметричное понятие. A и B независимы $\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

Примем это равенство же определением независимости (теперь оно верно и для $P(A)=0$)

Если равенство не выполняется, говорим A и B зависимы

События $A_1, \dots, A_n$ независимы [совместно], если $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$

$$\text{верно } P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_m})$$

Теперь Если $A_1, \dots, A_n$ независимы $i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s$ различны, то

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r} | A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_s}) = P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$$

$$A, B: P(A_1 A_2 \dots A_r | A_1 A_2 \dots A_s) = \frac{P(A_1 \dots A_r A_1 \dots A_s)}{P(A_1 \dots A_s)} \stackrel{\text{независимость}}{=} \frac{P(A_1) \dots P(A_r) P(A_1) \dots P(A_s)}{P(A_1) \dots P(A_s)} = P(A_1) \dots P(A_r)$$

Критерий независимости Пусть $P(B) \neq 0$. A и B незав. $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Сист. событий $A_1, \dots, A_n$ — конечным разбиением (разбиением), если $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ и $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Теор (Формула полной вероятности) $A_1, \dots, A_n$ — разбиение, $P(A_k) > 0 \forall k$
 $\Rightarrow \forall B \quad P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) P(B|A_k)$.

Д.б.: событие $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n) = B \cap A_1 \cup \dots \cup B \cap A_n$ — пересекается.

Теор (Формула Байеса) $A_1, \dots, A_n$ — разбиение, $P(A_k) > 0 \forall k$, $P(B) > 0 \Rightarrow$

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)}$$

Д.б.: по теор умножения $P(A_k B) = P(A_k) P(B|A_k) = P(B) P(A_k|B)$

$$\Rightarrow P(A_k|B) = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{P(B)} \leftarrow \text{по ф-ле полн. вер-ти.}$$

Интерпретация ф-лы Байеса:

A_k — гипотеза B — результат эксперимента.

$P(A_k)$ — априорная вероятность гипотезы

$P(A_k|B)$ — апостериорная, likelihood после получения эксперимента

В: наименьшая σ -алгебра, содержащая все полуинтервалы вида $a; b$

$-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$
 ↑
 Tomar nota

(Зачисл. с первого ур. в B^S отсюда пометить проиндексированное ур.)

Из свойств предобраз: $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ $f^{-1}(R) = \Omega$ $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

$$f^{-1}\left(\bigcap_n B_n\right) = \bigcap_n f^{-1}(B_n), \quad f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(B_n)$$

$A_3 \subseteq A$. A_2 - σ-алгебра порождённая сф. функцией z .

$$P_3(B) = P\{\zeta \in B\} = P(\zeta^{-1}(B)) - \text{непрямое в.т.в. н.в.} \left\{ \forall B \in \mathcal{B} \right\}$$

Воп. up-го (R, B, P_i) - всп. up-го. инвариантное с. лев.

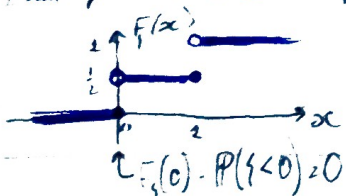
Динамика представления м. в.а.м. ? $F_3(x) = P_3((-\infty, x]) = P\{\xi \leq x\}$
(онег $\forall x \in \mathbb{R}$)

- 1 $\forall x \quad 0 \leq F(x) \leq 1$
- 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- 3 $F(x)$ monotonisch & stetig.
- 4 $F_3(x)$ konvergieren.

$$P_3(f_\infty, b) = f_3(b)$$

$$P_3([a, +\infty)) = 1 - F_3(a)$$

From } $\phi = 0$ and $\phi = 1$ a lap $\frac{1}{2}$ radian. so



On 1 June - peak growth

$$-x_0: \forall \varepsilon > 0 \quad F_f(x_0 + \varepsilon) - F_f(x_0 - \varepsilon) > 0$$

→ все $\gamma \in [0, 1]$ - точки разл.

$\sim U[0, 1]$
p.e. p.e. p.e.

Функция распределения имеет не более чем счётное число точек разрыва.

(т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$ может быть не более чем n т.с. разрывов $\geq \frac{1}{n}$).

Следовательно транзитивен т.с. разрывов $\geq \frac{1}{2}$, $\geq \frac{1}{3}$...

Дискретные, смешанные и абсолютно непрерывные функции распределения и случайные величины. Плотность распределения. Теорема Лебега о разложении функций распределения.

$F_Z(x)$ н.у. дискретной р.распр. (з.н.у. дискр. с.в.), если $F_Z(x)$ имеет не более чем счётное число точек роста $(x_1, \dots, x_n, \dots)$. (удобно для $p_i = P\{Z=x_i\}$).

$F_Z(x)$ н.у. абсолютно непрерывной (з. абс. непрерыв. с.в.), если она представляется в виде $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x p_Z(u) du$, где $p_Z(u) \geq 0$ — плотность распределения с.в.

$F_Z(x)$ н.у. смешанной (з. смешанная с.в.), если $F_Z(x)$ непрерывна и много точек её роста имеет нулевую меру Лебега (можно накрыть такими (счётным) числом интервалов суммарной длины $\leq \varepsilon \forall \varepsilon > 0$).

Примеры

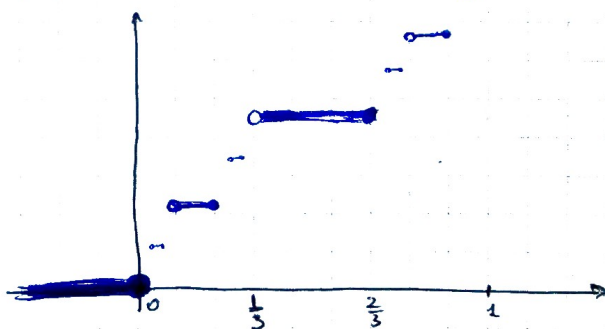
дискретные: Биномиальное $P\{Z=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0, \dots, n, \quad 0 < p < 1$.
 Пуассоновское $P\{Z=k\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$.
 Геометрическое $P\{Z=k\} = p(1-p)^k \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$.

абс. непрерыв.: Нормальная $p_Z(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Равномерное $p_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases} \quad -\infty < a < b < +\infty$

смешанная:

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 1 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}, & \frac{2}{3} < x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8}, & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$



Теор. Лебега (о разл. н.у. ф.распр. по разл. типам) Пусть Z — с.в. с ф.распр. $F_Z(x)$

Тогда $\exists!$ $F_{ac}(x), F_s(x), F_d(x)$ (абс. непрерывная, смешанная и дискретная ф.распр.) p_1, p_2, p_3 такие, что $F_Z(x) = p_1 F_{ac}(x) + p_2 F_s(x) + p_3 F_d(x)$ ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$)

(Единственность разл. по разл. типам ф.распр. только для абс. непрерывной, если коэфф. непрерывной $\neq 0$)

Упр 1

Δ. 60 Если $F_3(x)$ имеет 7 точек / точек разрыва (не одна из них) $x_1, \dots, x_n, \dots$ (гипотеза) и разрыв $\varphi_i = F_3(x_{i+0}) - F_3(x_i)$

$$\text{тогда } \hat{F}_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ \varphi_1, & x_1 < x \leq x_2 \\ \varphi_1 + \varphi_2, & x_2 < x \leq x_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Если $\sum \varphi_i = 1$, то $p_3 = 1, p_1 = p_2 = 0$ — доп. гарантия.

иначе $\sum \varphi_i = \alpha < 1$. $F_d(x) = \frac{1}{\alpha} \hat{F}_\lambda(x)$ $F_c(x) = \frac{F_3(x) - \hat{F}_\lambda(x)}{1 - \alpha}$ — непрерывная + разрыв

иначе ($F_3(x)$ — непрерывная) найдем $F_c(x) = F_3(x)$, $p_3 = 0$

Упр 2 $F_c(x)$ порождает меру ν_c . Базис 1. Лемма о разложении

мера $\exists! \nu_c + \nu_s \quad \nu_c(B) = \nu_s(B) + \nu_{ac}(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}$

Каждая из них порождает p. разрыв. меру. $F_c(x) = \frac{\nu_s((-\infty, x])}{\hat{F}_s(x)} + \frac{\nu_{ac}((-\infty, x])}{\hat{F}_{ac}(x)}$

$$1 = \nu_c(\mathbb{R}) = \nu_s(\mathbb{R}) + \nu_{ac}(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{F}_s(+\infty) = \nu_s(\mathbb{R}) = \beta, \quad \hat{F}_{ac}(+\infty) = \nu_{ac}(\mathbb{R}) = 1 - \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Если $\beta = 0 \Rightarrow p_2 = 0, \quad F_{ac} = F_c$

иначе $\beta = 1 \Rightarrow p_1 = 0, \quad F_s = F_c$

иначе $0 < \beta < 1 \Rightarrow F_s = \frac{1}{\beta} \hat{F}_s, \quad \hat{F}_{ac} = \frac{1}{1-\beta} F_{ac} \quad (F_c = \beta F_s + (1-\beta) F_{ac})$

Итак, все p-измеримые, непрерывные $(p_1 = (1-\beta)(1-\alpha), p_2 = \beta(1-\alpha), p_3 = \alpha)$ и т.д.

Моменты, математическое ожидание, дисперсия. Условие.

Математическое ожидание с.л. ξ называется $E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$
если $E\xi < \infty$, то говорят, что математическое ожидание ξ

Моменты порядка k с.л. ξ называются $E\xi^k$

Центральный момент порядка k - $E(\xi - E\xi)^k$

Дисперсия называется вторым моментом порядка 2 $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

Утв. $E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_{\xi}(dx)$ ($P_{\xi}(B) = P\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ (или $x = \xi(\omega)$)

Если ξ - дискр. с.л.в. с n значениями $x_1, \dots, x_n, \dots$ и вероятностями $p_1, \dots, p_n, \dots$

то P_{ξ} - дискр. мера и $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Если абсолютно непрерывное, то $E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x) dx$ p_{ξ} - плотность ξ

Св-ва: 1. $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$

2. $\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi \geq 0$

3. $\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$

4. $|E\xi| \leq E|\xi|$

5. $E c = c$

6. $D(\alpha\xi) = \alpha^2 D\xi$

7. $D(\xi + c) = D\xi$

$D\xi \geq 0$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

8. $E\xi^k < \infty \Rightarrow E\xi^m < \infty \quad \forall m \leq k$
(т.е. $|E\xi^m| \leq 1 + |E\xi^k|$)

9. ξ, η независимы, $E\xi, E\eta$ $\Rightarrow E\xi\eta = E\xi E\eta$

Ковариация $\text{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)]$

Ковариация $\text{cov}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}}$

10. ξ, η независимы $\Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$

11. ξ, η независимы $\Rightarrow D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

12. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$

III. $|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}$

$\Rightarrow |\text{cov}(\xi, \eta)| \leq 1$

равенство $\Leftrightarrow$ $\exists a, b \in \mathbb{R}: \eta = a\xi + b$

13. $|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \frac{D\xi + D\eta}{2}$

Пояснение φ - ген. моменты $M_{\xi}(t) = E e^{t\xi}$

+ Упр. 2.1. Векторы

$E\xi^n = \left. \frac{d^n}{dt^n} M_{\xi}(t) \right|_{t=0}$

Квантили. Медиана и её свойства. Интерквартильный размах.

Для $q \in (0, 1)$ квантилем порядка q (q-квантилем) с.в. ξ называ-
ется x_q : $P(\xi \leq x_q) \geq q$ и $P(\xi \geq x_q) \geq 1 - q$.

Медианой с.в. ξ наз. её квантиль порядка $\frac{1}{2}$. ($\text{med } \xi$)

(центр распределения: ξ с равной вероятностью $\leq$ или $>$ медианы, при этом...

Медиана непрерывной с.в. — корень ур. из $F_\xi(x) = \frac{1}{2}$.
(если граф возрастает, то ради единственности, иначе — наименьший x).



Вотличие от мат. ожидания медиана определяется для люб. в. распределений.



Мода — значение x_0 с.в. ξ для которого $F_\xi(x) \leq F_\xi(x_0)$ для любого x .
где дискретной с.в. $\text{mod } \xi = x_0$: $P(\xi = x_k) \leq P(\xi = x_0)$ $\forall k$.

Пусть $x_{1/4}$ и $x_{3/4}$ — квантили с.в. ξ порядка $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Разность $x_{3/4} - x_{1/4}$ называется интерквартильным размахом с.в. ξ .

(Внутри интервала $[x_{1/4}, x_{3/4}]$ ξ принимает с.в. $\frac{1}{2}$).

Цепочки Бернулли.

Результаты отдельных испытаний экспериментов (испытаний) в
каждом из которых возможны два противоположных события —
"успех" (вероятность p) и "неудача" (вероятность $q = 1 - p$) $0 \leq p \leq 1$.
Каждому испытанию допустим с.в. $\xi_i, i = 1, \dots, n$. Если ξ_i — раз-
ность ξ_i для успеха, то $\xi_i = 1$, иначе $\xi_i = 0$. Тогда $\xi_1, \dots, \xi_n$ имеют
однонаправленную зависимость.

Предп., что испытания независимы (т.е. $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы),
также называют цепочкой Бернулли.

Биномиальное распределение. Теорема Пуассона. Распределение Пуассона.

Биномиальное распределение ξ - число успехов в n испытаниях:

$$P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (\xi \sim B(n, p))$$

$$E\xi = np \quad D\xi = npq$$

Если ξ_1, ξ_2 независимы, $\xi_1 \sim B(n_1, p)$ и $\xi_2 \sim B(n_2, p)$, то $\xi_1 + \xi_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$

При больших n и m можно использовать бер-ну.

Теорема Пуассона Если $n \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$ т.е. $np \rightarrow \lambda$, то

$$\forall \text{ фиксир. } m=0, 1, \dots \quad P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m} \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

$$\text{Д-во: } P\{\xi = m\} = \frac{(np)^m}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) (1-p)^{n-m}$$

(учит, что $n \rightarrow \infty$, $np \rightarrow \lambda$, $(1-p)^n \rightarrow e^{-\lambda}$)

$$\text{Чтобы показать, что } \left| P\{\xi = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right| \leq \frac{\lambda^2}{n}$$

Теорема Пуассона - n независимых испытаний с разными вероятностями успеха (i -тый испытание бер-ну успеха p_i)

$$P\{\mu = 0\} = q_1 q_2 \dots q_n$$

$$P\{\mu = 1\} = p_1 q_2 \dots q_n + q_1 p_2 q_3 \dots q_n + \dots + q_1 q_2 \dots q_{n-1} p_n$$

$$P\{\mu = n\} = p_1 p_2 \dots p_n$$

Теор. Вектора Пуассона $\forall n$ и $\forall p_1, \dots, p_n$ и $\forall B$

$$\left| P\{\mu \in B\} - \sum_{m \in B} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2, \text{ где } \lambda = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

Д-во: Возьмем R из B^+ и B^- $m \in B^+$, если $P\{\mu = m\} > \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ и $m \in B^-$ иначе.

$$\text{Возьмем } \Sigma^+ = \sum_{m \in B^+} (P\{\mu = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}) \text{ и } \Sigma^- = \sum_{m \in B^-} (P\{\mu = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda})$$

$$\text{Так как } \sum_{m=0}^{\infty} P\{\mu = m\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = 1, \text{ то } 0 = \sum_{m=0}^{\infty} (P\{\mu = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}) = \Sigma^+ + \Sigma^-$$

$$\Rightarrow \Sigma^+ = |\Sigma^-|, \quad \Sigma^+ = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |P\{\mu = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}|. \quad |P\{\mu \in B\} - \sum_{m \in B} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}| \leq \max_{m \in B \cap B^+} |P\{\mu = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}| \cdot \sum_{m \in B \cap B^+} 1$$

$$\leq \Sigma^+. \text{ А-к мы показали, что } \Sigma^+ \leq \sum_{i=1}^n p_i^2. \text{ Б-к: } \Sigma^+ = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |P\{\mu = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}| = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^n p_i \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right|$$

$$\text{но в-к можно б-н } P_n\{\mu = m, p_1, \dots, p_n\} = P_{n-1}\{\mu = m, p_1, \dots, p_{n-1}\} \cdot q_n + P_{n-1}\{\mu = m, p_1, \dots, p_{n-1}\} \cdot p_n =$$

$$= \sum_{k=0}^m P_{n-1}(\mu=m-k; p_1, \dots, p_{n-1}) P_1(\mu=k; p_n)$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \quad \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^m}{m!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} = \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_1^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}$$

$$\sum_{n=1}^+ \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

$$\sum_n^+ = \frac{1}{2} \sum_n \left| \sum_k P_{n-1}(\mu=m-k; p_1, \dots, p_{n-1}) P_1(\mu=k; p_n) - \sum_k \frac{\lambda_{n-1}^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_{n-1}} \frac{p_n^k}{k!} e^{-p_n} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \left(\left| P_{n-1}(\mu=m-k; p_1, \dots, p_{n-1}) - \frac{\lambda_{n-1}^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_{n-1}} \right| \cdot P_1(\mu=k; p_n) + \frac{\lambda_{n-1}^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_{n-1}} \left| P_1(\mu=k; p_n) - \frac{p_n^k}{k!} e^{-p_n} \right| \right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^+ + p_n^2 \leq \sum_{k=1}^n p_k^2 \quad \text{ЧТД.}$$

Распределение с $P\{M=m\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$ наз. распределением Пуассона.

$$M \sim \text{Pois}(\lambda) \quad (M \sim P(\lambda))$$

$$EM = \lambda \quad DM = \lambda \quad \int_{\lambda_i \text{ независимы}} M \sim \text{Pois}(\lambda_i) \Rightarrow M = \sum M_i \sim \text{Pois}(\sum \lambda_i)$$

Геометрическое распределение. Теорема Релли. Показательное распределение.

Геометрическое распределение: проводим испытания Бернулли до первого успеха.

$$P\{Z=n\} = q^{n-1} p \quad EZ = \frac{1}{p} \quad DZ = \frac{q}{p^2} \quad Z \sim \text{Geom}(p) \quad (Z \sim G(p))$$

$$\left(\text{или } P\{Z=n\} = q^n p \quad EZ = \frac{q}{p} \quad DZ = \frac{q^2}{p^2} \right)$$

~ количество испытаний до успеха (пока не удалось)

$$\text{При } p > 0 \quad EZ \rightarrow \infty, \text{ но при } p > 0 \quad \forall x > 0 \quad P\left(\frac{Z}{EZ} < x\right) = P\{Z < x\} \rightarrow 1 - e^{-x}$$

то есть мы имеем закон Релли:

Теорема Релли Пусть N -суммарная величина, $N \sim G(p)$ величина $P(N=n) = q^{n-1} p$
 $\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые перем. величины: $\xi_i \geq 0, \quad 0 < E\xi_i < \infty$. и $S_N = \sum_{i=1}^N \xi_i$

$$\text{Тогда } \sup_{x \geq 0} \left| P\left(\frac{PS_N}{E\xi_i} < x\right) - (1 - e^{-x}) \right| \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0, \text{ причем}$$

$$\sup_{x \geq 0} \left| P\left(\frac{PS_N}{E\xi_i} < x\right) - (1 - e^{-x}) \right| \leq \frac{p}{q} \frac{E\xi_i^2}{(E\xi_i)^2} \quad (\text{Доказательство не приводится})$$

$1 - e^{-x}$ является функцией распределения т.н. справедливо непрерывного распределения.
Показательное (экспоненциальное) распределение: $Z \sim \text{Exp}(\lambda) \quad F_Z(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad p_Z(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (EZ = \frac{1}{\lambda} \quad DZ = \frac{1}{\lambda^2})$

Теорема Мульра - Лапласа. Нормальное распределение

Локальная предельная теорема Мульра - Лапласа

Есть (схема Бернулли) $p \in (0, 1)$, $n \rightarrow \infty$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)
и x равномерно ограничена (по n и m), $\mu \sim B(n, p)$

$$P\left\{\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} = x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1))$$

Д.л.: Обозначим $\sigma = \sqrt{npq}$

$$m = x\sigma + np \Rightarrow P\{\mu = m\} = P\left\{\frac{\mu - np}{\sigma} = x\right\} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

$$\text{Оценим } \ln(P\{\mu = m\}) = \ln n! - \ln m! - \ln(n-m)! + m \ln p + (n-m) \ln q$$

Воспользуемся формулой Стирлинга $\ln n! = n \ln n + \ln \sqrt{2\pi n} - n + O(\frac{1}{n})$
 $\sigma \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$
 $m = np(1 + \frac{xq}{\sigma}) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $k = n - m = nq(1 - \frac{xq}{\sigma}) \rightarrow \infty$

$$\text{Тогда } \ln P\{\mu = m\} = n \ln n - m \ln m - k \ln k + m \ln p + k \ln q + \frac{1}{2} \ln \frac{n}{2\pi m k} + o(\frac{1}{n}) - o(\frac{1}{m}) - o(\frac{1}{k})$$

$$\text{Упростим } \ln \frac{n}{mk} = \ln \frac{1}{npq} - \ln(1 + \frac{xq}{\sigma}) - \ln(1 - \frac{xq}{\sigma}) = 2 \ln \frac{1}{\sigma} + O(\frac{1}{\sigma^2}),$$

$$\frac{1}{n} = O(\frac{1}{\sigma^2}), \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{np(1 + \frac{xq}{\sigma})} = O(\frac{1}{\sigma^2}), \quad \frac{1}{k} = O(\frac{1}{\sigma^2}) \text{ и } \ln(1+x) = o(x) \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{Итак } \ln P\{\mu = m\} &= -m \ln \frac{m}{np} - k \ln \frac{k}{nq} + \ln \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} + O(\frac{1}{\sigma}) = \\ &= -(np + x\sigma) \ln(1 + \frac{xq}{\sigma}) - (nq - x\sigma) \ln(1 - \frac{xq}{\sigma}) + \ln \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} + O(\frac{1}{\sigma}) = \\ &= \ln \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} - (np + x\sigma) \left(\frac{xq}{\sigma} - \frac{x^2 q^2}{2\sigma^2} + O(\frac{1}{\sigma^2}) \right) - (nq - x\sigma) \left(-\frac{xq}{\sigma} - \frac{x^2 q^2}{2\sigma^2} + O(\frac{1}{\sigma^2}) \right) + O(\frac{1}{\sigma}) = \\ &= \ln \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2} + O(\frac{1}{\sigma}). \text{ Экспоненцируем. ЧТД.} \end{aligned}$$

Аналогично можно вывести вернее $P\{m_1 \leq \mu \leq m_2\}$

при p, q близки к $\frac{1}{2}$ и $n \rightarrow \infty$ можно применить следующую теорему:

Интервальная предельная теорема Муллена-Лемма

При $n, p, q \rightarrow \infty$ $P\left\{a \leq \frac{\mu - n\mu}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \rightarrow 0$
 равномерно по a, b
 $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$

Дано. Случайно разброс, что $|a| \leq C, |b| \leq C$

Возьмем $m_1 = \lceil np + a \sqrt{npq} \rceil, m_2 = \lfloor np + b \sqrt{npq} \rfloor$

$P\left\{a \leq \frac{\mu - n\mu}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} P\{\mu = m\}$

Введем X_m т.е. $m = np + X_m \sqrt{npq}$ тогда $\Delta X_m = X_{m+1} - X_m = \frac{1}{\sigma} (\sqrt{npq})$

По локальной пр. теор. Муллена-Лемма $P\left\{a \leq \frac{\mu - n\mu}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}} \cdot \Delta X_m (1 + O(\frac{1}{\Delta X_m}))$

Эта сумма при $\sigma \rightarrow \infty$ сходится равномерно на a, b к указанным интегралу.

т.к. $P\left\{\left|\frac{\mu - n\mu}{\sigma}\right| > C\right\} = 1 - P\left\{\left|\frac{\mu - n\mu}{\sigma}\right| \leq C\right\}$ и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^C e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

(т.е. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^C e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$)

Итак $\left| P\left\{\left|\frac{\mu - n\mu}{\sigma}\right| > C\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| = \left| P\left\{\left|\frac{\mu - n\mu}{\sigma}\right| \leq C\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^C e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right|$

Укажем, что $\rightarrow 0$ при $C \rightarrow \infty$

$P\left\{\left|\frac{\mu - n\mu}{\sigma}\right| > C\right\} \rightarrow 0$ при $C \rightarrow \infty$

и $\rightarrow 0$

т.к. $n \rightarrow \infty$

→ то и

Теперь для $[a, b]$ модой. Возьмем $[A, B] = [a, b] \cap [-C, C]$ ($-C \leq A \leq B \leq C$)

$P\left\{a \leq \frac{\mu - n\mu}{\sigma} \leq b\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq P\left\{\left|\frac{\mu - n\mu}{\sigma}\right| > C\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \left| P\left\{A \leq \frac{\mu - n\mu}{\sigma} \leq B\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right|$

по первой сумме $\rightarrow 0$ по второй $\rightarrow 0$

Нормальное распределение $\sim N(\mu, \sigma^2)$
 $P = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\sigma, \mu \in \mathbb{R}; \sigma > 0$

$E\xi = \mu, D\xi = \sigma^2$

$\rightarrow 0$ при $C \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$
 равномерно

уже доказано $\rightarrow 0$ ч.д.

Стандартное нормальное распределение

$\sim N(0, 1)$

ξ_1, ξ_2 независимы, $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Свойства случайных величин. Совместное функцие распределения. Независимость случайных величин. Кривая независимости. Коларианс. Коэффициент корреляции.

Пусть задано вер. нр-во. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и в котором заданы n случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ или вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\bar{\xi}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Потребует, чтобы $\bar{\xi}^{-1}(B^{(n)}) \in \mathcal{A} \quad \forall B^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}$ - σ -алгебра $\mathbb{R}^n$

Совместное распределение $P_{\xi_1, \dots, \xi_n}(B^{(n)}) = \mathbb{P}(\bar{\xi} \in B^{(n)})$

Совместная функция распределения $F_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n), x_i \in \mathbb{R}$

Утв. Совместная функция распределения однозначно определяет совместное распределение $\bar{\xi}$ и $\bar{\xi}$ унич. определяется, если $\bar{\xi}$ принимает не более чем счетное число значений

$$\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(n)} \quad \bar{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}) \quad \left(\mathbb{P}(\bar{\xi} = \bar{a}^{(i)}) > 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\bar{\xi} = \bar{a}^{(i)}) = 1 \right)$$

Утв. $\xi_1, \dots, \xi_n$ - дискретные с.в. $\Leftrightarrow \bar{\xi}$ - дискретный случайный вектор.

$F_{\bar{\xi}}$ и $\bar{\xi}$ унич. абс. непрерывны, если $F_{\bar{\xi}}$ представляется в виде

$$F_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

$p_{\bar{\xi}}(u_1, \dots, u_n)$ унич. совместной плотностью распределения.

Утв. $\bar{\xi}$ - абс. непрерывный с.в. $\Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ - абс. непрерывные в.к.м.

(Обратное не верно)

Точная решетка унич. $\bar{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) : \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\{\xi_1 \in [x_1^{(i)} - \varepsilon, x_1^{(i)} + \varepsilon), \dots, \xi_n \in [x_n^{(i)} - \varepsilon, x_n^{(i)} + \varepsilon)\} > 0$

$\bar{\xi}$ и $F_{\bar{\xi}}$ унич. сингулярны, если $F_{\bar{\xi}}$ непрерывна, а ни-одна точка решетки имеет нулевую меру Лебега.

В многомерном случае справедлив аналог т. Лебега о разложении ф. расп.

$\exists! \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \exists! F_{ac}, F_0, F_s : F_{\bar{\xi}} = \alpha_1 F_0 + \alpha_2 F_{ac} + \alpha_3 F_s$

(или $\alpha_1 = 0$ по соотв. ф-м и сужения)

абс. непрерывный, дискретный, сингулярный

(без доказ-ва)

и.е. события $\{1, \dots, n\}$ независимы $\Leftrightarrow B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}$

$$\Rightarrow P\{Z_1 \in B_1, Z_2 \in B_2, \dots, Z_n \in B_n\} = P\{Z_1 \in B_1\} \cdot P\{Z_2 \in B_2\} \cdot \dots \cdot P\{Z_n \in B_n\}$$

Критерий независимости (?) $Z_1, \dots, Z_n$ независимы $\Leftrightarrow F_{Z_1, \dots, Z_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{Z_i}(x_i)$

Если $Z_1, \dots, Z_n$ абс. независимы, то $Z_1, \dots, Z_n$ независимы $\Rightarrow P_{Z_1, \dots, Z_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P_{Z_i}(x_i)$

Число $\text{cov}(Z, Y) = E((Z - EZ)(Y - EY))$ называется ковариацией случайных величин Z и Y . $\text{cov}(Z, Y) = EZY - EZ \cdot EY$

Если $\text{cov}(Z, Y) > 0$, то говорят, что отношение Z от EZ в большинстве (насколько) случаев в среднем больше, чем отношение Y от EY в большинстве (насколько) случаев, и наоборот. Тогда

Z и Y наз. положительно коррелированными.

Если $\text{cov}(Z, Y) < 0$, то отрицательно коррелированными.

Если $\text{cov}(Z, Y) = 0$, то Z и Y наз. некоррелированными.

Усл. Z, Y независимы $\Rightarrow \text{cov}(Z, Y) = 0$ (обратно не верно, пример: $\text{cov}(Z, Y) = 0$, $P\{Z=0, Y=0\} = 0$, $P\{Z=1\} \cdot P\{Y=1\} = \frac{1}{16}$)

$$D(Z+Y) = DZ + DY + 2\text{cov}(Z, Y)$$

$$\text{corr}(Z, Y) = \frac{\text{cov}(Z, Y)}{\sqrt{DZ \cdot DY}} - \text{коэффициент корреляции}$$

(В отличие от ковариации, коэффициент корреляции не зависит от размерности)

$$|\text{corr}(Z, Y)| \leq 1$$

$$|\text{corr}(Z, Y)| = 1 \Rightarrow P(Y = aZ + b) = 1 \text{ на каком-то интервале}$$

$$\text{corr} = 1 \Rightarrow a > 0$$

$$\text{corr} = -1 \Rightarrow a < 0$$

Коэф. корреляции близкий к ± 1 означает сильную линейную зависимость функций, но не из-за причинно-следственной связи.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

$\xi_1, \dots, \xi_n$ заданы на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Говорят, что $\{\xi_n\}$ сходится к ξ по вероятности, если $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \stackrel{P}{=} \xi$.

Говорят что $\{\xi_n\}$ сходится к ξ почти всюду (почти наверное), если $P\{\omega: \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\} = 1$
(т.е. нullo мерно множество ω , для которых $\xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)$ имеет нулевую вер. п.)

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{p.v.} \xi$ или $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$.

Говорят что $\{\xi_n\}$ сходится к ξ в среднем порядка $\alpha > 0$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n - \xi|^\alpha = 0$

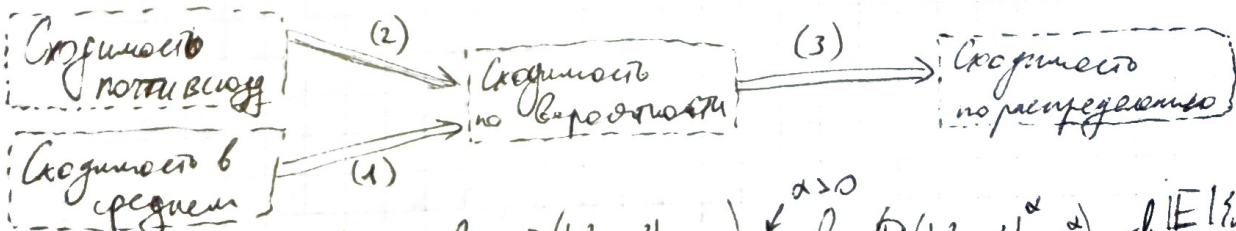
Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^\alpha} \xi$ (при $\alpha=2$ наз. ср. п. (среднеквадратичная))

Говорят что $\{\xi_n\}$ сходится к ξ по распределению (слабо), если $F_{\xi_n}(x_0) \rightarrow F_\xi(x_0)$

где $\forall x_0: F_\xi(x_0)$ непрерывна (т.е. во всех точках непрерывности F_ξ)

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ($\xi_n \Rightarrow \xi$)

Другое определение ср. п. по распределению: $\lim_{n \rightarrow \infty} E f(\xi_n) = E f(\xi)$
где f непрерывная ограниченная функ. f .



А.е.:

$$(1) \forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0 \quad \xrightarrow{\alpha > 0} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)^\alpha \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E|\xi_n - \xi|^\alpha}{\varepsilon^\alpha} = 0$$

знаменител и $\rightarrow 0$ ЧТБ

независимо от ε по Лемме ЧТБ

$$(2) P\{\omega: \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\} = P\{\omega: \forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N |\xi_n - \xi| < \frac{1}{k}\} = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 P\left\{\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} (\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon)\right\} = 1 \quad \Leftrightarrow P\left\{\lim_{N \rightarrow \infty} B_N\right\} = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Обозначим B_N

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} B_N = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

Так как вероятности непрерывны (см. стр. 2)

$$P\{\lim_{N \rightarrow \infty} B_N\} = \lim_{N \rightarrow \infty} P\{B_N\} = 1$$

$$1 \geq P\{|z_n - z| < \varepsilon\} \geq P\{\bigcap_{n=N}^{\infty} (|z_n - z| < \varepsilon)\} \xrightarrow{B_N} 1$$

Значит $\downarrow$ 1, значит $P\{|z_n - z| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ ч.д.

(2) Значит $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|z_n - z| > \varepsilon) = 0$, тогда по лемме $\lim_{n \rightarrow \infty} E\varphi(z_n) = E\varphi(z)$
 вып. вып. φ — вып. φ .

$$|E\varphi(z_n) - E\varphi(z)| \leq E|\varphi(z_n) - \varphi(z)| = \int_{\Omega} |\varphi(z_n(\omega)) - \varphi(z(\omega))| P(d\omega) =$$

$$= \int_{|\varphi(z_n) - \varphi(z)| > \varepsilon} |\varphi(z_n) - \varphi(z)| P(d\omega) + \int_{|\varphi(z_n) - \varphi(z)| \leq \varepsilon} |\varphi(z_n) - \varphi(z)| P(d\omega)$$

$$|\varphi(z_n) - \varphi(z)| > \varepsilon \quad |\varphi(z_n) - \varphi(z)| \leq \varepsilon$$

Будем считать φ мажор. $|\varphi(x)| < C$ $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < 2C$

$$\text{Значит } |E\varphi(z_n) - E\varphi(z)| < 2C \cdot P\{|\varphi(z_n) - \varphi(z)| > \varepsilon\} + \int_{|\varphi(z_n) - \varphi(z)| \leq \varepsilon} |\varphi(z_n) - \varphi(z)| P(d\omega) \leq 1$$

т.к. φ непрерывна $\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon_0 > 0: |z_n - z| < \varepsilon_0 \Rightarrow |\varphi(z_n) - \varphi(z)| < \varepsilon$

$$\text{Значит } \{\omega: |\varphi(z_n(\omega)) - \varphi(z(\omega))| > \varepsilon\} \subseteq \{\omega: |z_n(\omega) - z(\omega)| > \varepsilon_0\}$$

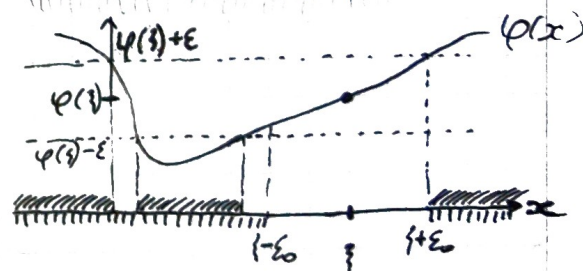
$$\text{и } P\{|\varphi(z_n) - \varphi(z)| > \varepsilon\} \leq P\{|z_n - z| > \varepsilon_0\}$$

$$|E\varphi(z_n) - E\varphi(z)| < 2C \cdot P\{|z_n - z| > \varepsilon_0\} + \varepsilon$$

т.к. $P\{|z_n - z| > \varepsilon_0\} \rightarrow 0 \forall \varepsilon_0$ (по 1)

$$\exists N: \forall n \geq N \quad P\{|z_n - z| > \varepsilon_0\} < \frac{\varepsilon}{2C}$$

т.е. $|E\varphi(z_n) - E\varphi(z)| < 2\varepsilon$ и это верно $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow E\varphi(z_n) \rightarrow E\varphi(z)$



(3) не вып. л. аддитивной структуры: $w \sim U[0, 1]$ $z(w) = w$ $\eta(w) = 1 - w$

$$F_z = F_\eta = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in [0, 1] \\ 1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{распредел. } z, \eta, z, \eta \text{ — совпадают, но они не совпадают (взято } \varepsilon = \frac{1}{2}, w = \frac{1}{4})$$

(2) не вып. л. аддитивной структуры. $w \sim U[0, 1]$ $z_1 = \begin{cases} 1 & w \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & w \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ $z_2 = \begin{cases} 0 & w \in [0, \frac{1}{4}] \\ 1 & w \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$ $z_3 = \begin{cases} 1 & w \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & w \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$

$z_4 = \begin{cases} 0 & \\ 0 & \end{cases}$ $z_5 = \begin{cases} 0 & \\ 1 & \end{cases}$ $z_6 = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \end{cases}$... так, что $\forall w \quad z_n(w) \not\rightarrow$ т.к. $\forall N \exists n_0 > N: z_{n_0} > 0$ и $\exists n_1 > N: z_{n_1} = 0$

Но $P\{|z_n - 0| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ т.е. $z_n \xrightarrow{P} 0$

из с.т. в среднем не следует существование почти наверное
 т.е. (используя ту же конструкцию, что и в первом примере) $E|Z_n - 0|^2 \rightarrow 0$
 но (как показано в др. примере) $Z_n \not\rightarrow 0$ н.о.

Из с.т. н. не следует с.т. в среднем: $w \sim U[0,1]$ $Z_n = \begin{cases} n^\beta & w \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & w \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$
 Получим с.т. почти всюду 0, но $E|Z_n|^2 = n^{2\beta} \cdot \frac{1}{n}$. Если $\beta \geq \frac{1}{2}$, то с.т. всюду 0
 не следует (следует из м.т. расщепления).

(1) не верно в обратную сторону т.к. (на примере из др. примера)

$P\{|Z_n - 0| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ т.е. $Z_n \xrightarrow{P} 0$, но в среднем может с.т. и не расщепляться.

Еще два: 1) $Z_n \xrightarrow{P} \{$ и $|Z_n| < C$ (о.р. равномерно по w), то $Z_n \xrightarrow{L^2} \{$
 $\forall \varepsilon > 0$
 2) $Z_n \xrightarrow{d} \{ = C \Rightarrow Z_n \xrightarrow{P} \{$

Характеристические функции и их свойства.

Характеристическая функция с.в. ξ наз. функ. определена для $\forall t \in \mathbb{R}$ как

$$\varphi_{\xi}(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \mathbb{E}(\cos(t\xi)) + i \cdot \mathbb{E}(\sin(t\xi))$$

1) $|\varphi_{\xi}(t)| \leq 1 \quad \forall t$ (т.е. она определена для $\forall \xi$ и $\forall t$)

$$\text{А-ло: } |\varphi_{\xi}(t)|^2 = |\mathbb{E} \cos(t\xi) + i \mathbb{E} \sin(t\xi)|^2 = (\mathbb{E} \cos(t\xi))^2 + (\mathbb{E} \sin(t\xi))^2 \leq \mathbb{E} \cos^2(t\xi) + \mathbb{E} \sin^2(t\xi) = \mathbb{E}(\cos^2(t\xi) + \sin^2(t\xi)) = 1.$$

Дн ≥ 0
т.е. $(\mathbb{E} \eta)^2 \leq \mathbb{E} \eta^2$

2) $\varphi_{\xi}(t)$ равномерно непрерывна на всей числовой оси

А-ло: ун. функ. непрерыв: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t) - f(t+\delta)| < \varepsilon$

$$|\varphi_{\xi}(t+\delta) - \varphi_{\xi}(t)| = |\mathbb{E} e^{i(t+\delta)\xi} - \mathbb{E} e^{it\xi}| = |\mathbb{E}(e^{it\xi}(e^{i\delta\xi} - 1))| \leq \mathbb{E}(|e^{it\xi}| |e^{i\delta\xi} - 1|) = \mathbb{E}|e^{i\delta\xi} - 1| = \mathbb{E}(|e^{i\delta\xi} - 1| \cdot \mathbb{1}_{\{| \xi | < \frac{1}{\delta}\}}) + \mathbb{E}(|e^{i\delta\xi} - 1| \cdot \mathbb{1}_{\{| \xi | \geq \frac{1}{\delta}\}}) \leq |e^{\pm i\delta} - 1| \cdot 1 + 2 \cdot \mathbb{P}\{| \xi | \geq \frac{1}{\delta}\} \stackrel{?}{\leq} \varepsilon$$

$\pm i\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow e^{\pm i\delta} \rightarrow 1 \Rightarrow |e^{\pm i\delta} - 1| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$

$\frac{1}{\delta} \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbb{P}\{| \xi | \geq \frac{1}{\delta}\} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$

Значит, можно подобрать такие δ_1 и δ_2 , что $|e^{\pm i\delta_1} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$

и $\mathbb{P}\{| \xi | \geq \frac{1}{\delta_2}\} < \frac{\varepsilon}{4}$

и взять $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и т.д.

3) Всякая функ. представимая однозначно св. ф.р. функ. $(\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P_{\xi}(dx))$

Каждой функ. однозначно отвечает функ. распределения.

(доказательство см. Мирев "Вероятность", стр 300, теорема 2)*

4) $\varphi_{\xi}(t)$ принимает только действительные значения $\Leftrightarrow \xi$ имеет симметричное распределение.

симметрично $\Leftrightarrow \varphi_{\xi}(t) = \varphi_{-\xi}(t)$

$$\varphi_{\xi}(t) \in \mathbb{R} \stackrel{\forall t}{\Rightarrow} \varphi_{\xi}(t) = \mathbb{E}(\cos(t\xi)) = \mathbb{E}(\cos(-t\xi)) = \varphi_{-\xi}(t)$$

$\uparrow \mathbb{E}(\sin(t\xi)) = 0$

$$\varphi_{\xi}(t) = \varphi_{-\xi}(t) \Rightarrow 2\varphi_{\xi}(t) = \varphi_{\xi}(t) + \varphi_{-\xi}(t) = \mathbb{E} \cos(t\xi) + i \mathbb{E} \sin(t\xi) + \mathbb{E} \cos(-t\xi) + i \mathbb{E} \sin(-t\xi) \Rightarrow \varphi_{\xi}(t) = \mathbb{E} \cos(t\xi) \in \mathbb{R} \quad \forall t.$$

5) $\varphi_{\xi}(0) = 1$

6) $\varphi_{\xi}(-t) = \overline{\varphi_{\xi}(t)}$ (Хар. функ. сопряжена)

- 7) (теорема Бохнера-Хинчина) $\varphi(t)$ является х.р. ф. $\Leftrightarrow$
 $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t)$ непрерывно определена т.е. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$
 линейное $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(t_k - t_j) c_k \bar{c}_j \geq 0$. (г-ло Шурев, стр 305) [⊙]
- 8) $E\{\xi^k} < \infty \Rightarrow \exists \frac{d^k \varphi(t)}{dt^k} = \varphi^{(k)}(t) \quad \forall k=1, \dots, n$ и $\varphi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$
 (г-ло Шурев, стр. 297, д-ло 5) [⊙]

- 9) Формула обращения: где a, b — точки непрерывности $F_\xi(x)$
 (а это мн-во плотно, т.к. точки разрыва — конечное число).

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} \varphi_\xi(t) dt$$
- Если же $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_\xi(t)| dt < \infty$, то $F_\xi(x)$ ад. непрерывна
 и имеет рекур. $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_\xi(t) dt$.
 (В то время как $\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x) dx$ где ад. непр. разлагается —
 обратит с преобразованием Фурье)
 (г-ло Шурев, стр 392) [⊙]

10) $\varphi_{a+ib_\xi}(t) = E e^{it(a+ib_\xi)} = e^{ita} E e^{itb_\xi} = e^{ita} \varphi_\xi(tb)$.

11) Если ξ и η независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = E e^{it(\xi+\eta)} = E e^{it\xi} E e^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \varphi_\eta(t)$.

12) Разложение в ряд Тейлора. Пусть $E\{\xi^k} < \infty$ на некотором $k \in \mathbb{N}$,
 тогда $\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + \sum_{j=1}^k \frac{t^j}{j!} \varphi_\xi^{(j)}(0) + o(|t|^k) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{i^j t^j}{j!} E\xi^j + o(|t|^k)$

13) Теор. о непрерывном сходстве $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall t \varphi_{\xi_n}(t) \rightarrow \varphi_\xi(t)$.
 (см. Главы 2 и 3 "курс ТВ и МС", стр 140) [⊙]

Закон Больших чисел в форме Хинчина

354 Хинчина $\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые случайности, одинаково расп. и $E\xi_1 < \infty$

Тогда $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{IP} E\xi_1$

Д-во. т.к. $E\xi_1$ - постоянна, то достаточно η_n сходиться по распределению.

т.е. $F_{\eta_n}(x_0) \rightarrow F_a(x_0)$ $\forall$ непрерывной x_0 . Здесь $\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$, $a = E\xi_1$.

по теореме о непрерывном соответствии $\Leftrightarrow \varphi_{\eta_n}(t) \rightarrow \varphi_a(t)$

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta_n} &= \{\text{пл. хар. функ.}\} = \varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right) \varphi_{\xi_2}\left(\frac{t}{n}\right) \dots \varphi_{\xi_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \\ &= \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{ita}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{ita} \quad \text{что и треб.} \end{aligned}$$

$$\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + itE\xi_1 + o(t^2) \quad (\text{д-во 12 на стр 21}).$$

* Теор. о непрерывном соотв. $\{\xi_n\}$ сходится по распределению к ξ

$$\Leftrightarrow \forall t \quad \varphi_{\xi_n}(t) \rightarrow \varphi_{\xi}(t). \quad (\text{см. д-во})$$

(д-во 1 в задачниках "курс ТВМ", стр 140)

Центральная предельная теорема.

ЦПТ: $\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые, одинаково распределенные с.в. $E\xi_1 = a$ $D\xi_1 = \sigma^2$

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{, \{ \sim N(0, 1)$, где $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

А-то: Надо показать, что $P\left\{\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} < x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ для всех x .

Введем $\eta_k = \frac{\xi_k - a}{\sigma}$ Тогда $\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$
 причем $E\eta_k = 0$ и $D\eta_k = 1$. η_k независимые, одинаково распределенные с.в.

$$\varphi_{\frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \cdot \dots \cdot \varphi_{\eta_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$E\eta_1 = 0 \quad E\eta_1^2 = D\eta_1 + E\eta_1 = 1$$

Разложим по формуле Тейлора $\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$

Значит $\varphi_{\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$

По кор. о непрерывном соответствии (Белый, стр 140)

↑
Хар. функ. норм. расп. с.в.

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} \{ \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Условное математическое ожидание.

Дано вер. прбо $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и т.ч. $E\zeta < \infty$ и $\zeta \geq 0$

Пусть $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$

$\uparrow$ σ -подалгебра

Случайная величина $E(\zeta | \hat{\mathcal{A}})$ наз. условным мат. ожиданием ζ относительно σ -алгебры $\hat{\mathcal{A}}$, если

а) $E(\zeta | \hat{\mathcal{A}})$ измерима относит. $\hat{\mathcal{A}}$ (т.е. $\forall B \in \mathcal{B}$ и любой $B \in \hat{\mathcal{A}}$)

б) $\forall A \in \mathcal{A}_1: E(E(\zeta | \hat{\mathcal{A}}) \cdot \mathbb{1}_A) = E(\zeta \cdot \mathbb{1}_A)$ *

ζ произвольного знака переводим в плюс $\zeta = \zeta^+ - \zeta^-$ где $\zeta^+ = \max(\zeta, 0)$
и получим $E(\zeta | \mathcal{A}_1) = E(\zeta^+ | \mathcal{A}_1) - E(\zeta^- | \mathcal{A}_1)$
 $\zeta^- = \max(-\zeta, 0)$.

Условное мат. ожидание ζ относительно η ($\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - гр. сл. пер.)

$E(\zeta | \eta) = E(\zeta | \mathcal{A}_\eta)$ где $\mathcal{A}_\eta = \sigma(\eta)$ - σ -алгебра, порожденная η .

* (Здесь я совсем не уверен в правильности!)

$$E(\zeta \cdot \mathbb{1}_A(\omega)) = \int_A \zeta P(d\omega) \underset{\text{обозначим}}{=} Q(A) \quad - \text{некоторое конкретное отн. P мера.}$$

По теореме Радона-Никодима (см. Википедия) $\exists$ функ. $\varphi(\omega)$, измеримая отн. $\hat{\mathcal{A}}$, т.ч. $Q(A) = \int_A \varphi(\omega) P(d\omega)$. $\forall A \in \mathcal{A}_1$.

$$\left(\text{как тогда } E(E(\zeta | \hat{\mathcal{A}}) \cdot \mathbb{1}_A(\omega)) = \int_A \frac{E(\zeta | \hat{\mathcal{A}}) \cdot P(d\omega)}{\varphi(\omega)} \right)$$

Единственность?

Пусть $\exists$ $\psi(\omega)$ изм. отн. $\hat{\mathcal{A}}$ и $Q(A) = \int_A \psi(\omega) P(d\omega)$ $\forall A \in \mathcal{A}_1$,

$$\text{тогда } 0 = \int_A (\varphi(\omega) - \psi(\omega)) P(d\omega) \quad \forall A \in \mathcal{A}_1,$$

В т.ч. для $A_+ = \{\omega: \varphi(\omega) > \psi(\omega)\}$ и $A_- = \{\omega: \varphi(\omega) < \psi(\omega)\}$.

Значит $\varphi(\omega) = \psi(\omega)$ почти всюду отн. P

Выборы:

$$1) E(\xi|\eta) = h(\eta), \text{ где } h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(где $\forall y \in \mathbb{R} \quad E(\xi|\eta=y) = h(y)$ - некоторая функ.

$$2) \xi \geq 0 \text{ почти наверное} \Rightarrow E(\xi|\mathcal{A}) \geq 0 \text{ почти наверное}$$

$$3) \text{ Если } \xi \text{ независима от } \eta \text{ то } E(\xi|\eta) = E\xi$$

$$9) E(\xi|\xi) = \xi \text{ (т.е. } E(\xi|\xi=a) = a)$$

$$4) E(a\xi + b\eta|\mathcal{A}) = aE(\xi|\mathcal{A}) + bE(\eta|\mathcal{A})$$

$$5) E(\xi\eta|\mathcal{A}) = \xi E(\eta|\mathcal{A})$$

$$6) E(\varphi(\xi, \eta)|\mathcal{A}) = E(\varphi(x, \eta)|\mathcal{A})|_{x=\xi}$$

$$7) \text{ Если } \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \text{ то } E(E(\xi|\hat{\mathcal{A}})|\hat{\mathcal{A}}) = E(\xi|\hat{\mathcal{A}}) = E(E(\xi|\mathcal{A})|\hat{\mathcal{A}})$$

$$8) E(E(\xi|\eta)) = E\xi$$

(4-7 берем как все выражение УМО некоторой системы)

Дискретный случай:

ξ принимает значения $a_1, \dots, a_n, \dots$ с вероятностями $p_1, \dots, p_n, \dots$
 η принимает значения $b_1, \dots, b_m, \dots$ с вероятностями $q_1, \dots, q_m, \dots$

$$E(\xi|\eta=b_i) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j P(\xi=a_j|\eta=b_i)$$

$$E(\xi|\eta) = E(\xi|\eta=b_i)|_{b_i=\eta} \leftarrow \text{нужно переименовать } b_i \text{ на } \eta.$$

Пример: ξ, η независимы, $\xi, \eta \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$\Rightarrow \xi + \eta \sim \text{Pois}(2\lambda)$$

$$P(\xi=i|\xi+\eta=k) = \frac{P(\xi=i, \eta=k-i)}{P(\xi+\eta=k)} = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-i}}{(k-i)!}}{\frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^k}{k!}}, \quad i \leq k$$

$$0, \quad i > k$$

$$i=0, \dots, k \quad P = \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} C_k^i \sim B(k; \frac{1}{2}) \Rightarrow E(\xi|\xi+\eta=k) = \frac{k}{2}$$

$$\text{Значит } E(\xi|\xi+\eta) = \frac{\xi+\eta}{2}.$$

$E(\xi|\mathcal{A})$ можно также представить в виде математического ожидания с.в. ξ на $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, P(\cdot|\mathcal{A}))$.
 в данном случае $\mathcal{A} = \{\xi+\eta=k\}$.

Абсолютно непрерывные случайные величины:

В этом случае $P(\eta = y_0) = 0$, тогда предположим, что $P(-\varepsilon < \eta - y_0 < \varepsilon) > 0$.

т.е. $p_\eta(y) > 0$

Будем рассматривать случай, когда известна плотность распределения ξ, η
 $p(x, y) \in C$

Тогда $p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx$

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad P\{\xi < u \mid \eta \in (y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon)\} = \frac{P\{\xi < u, \eta \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)\}}{P\{\eta \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)\}}$$

$$= \frac{\int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \int_{-\infty}^u p(x, y) dx dy}{\int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} p_\eta(y) dy} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^u \frac{p(x, y_0)}{p_\eta(y_0)} dx \stackrel{\text{def}}{=} P\{\xi < u \mid \eta = y_0\}$$

Условная плотность ξ при зад. $\eta = y_0$ наз. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{p(x, y_0)}{p_\eta(y_0)}, \text{ если } p_\eta(y_0) > 0 \\ 0, \text{ если } p_\eta(y_0) = 0 \end{array} \right.$ условная $F_\xi(u) = P\{\xi < u\} = \int_{-\infty}^u p_\xi(x) dx$

Условная математическая expectation ξ при зад. $\eta = y_0$ наз. $E(\xi \mid \eta = y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{p(x, y_0)}{p_\eta(y_0)} dx$, $p_\eta(y_0) > 0$
 (сравните с математ. ожиданием абс. непрерывной случайной величины $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx$)

Условная математическая expectation ξ при зад. η наз. а.п. $E(\xi \mid \eta) = E(\xi \mid \eta = y_0) \big|_{y_0 = \eta}$

Пример: ξ, η независимы, $\xi, \eta \sim \text{Exp}(\lambda)$ $p_{\xi, \eta}(x, y) \stackrel{\text{незав.}}{=} p_\xi(x) \cdot p_\eta(y) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} \quad (x, y > 0)$

$$p_{\xi, \eta}(x, y) = p_{\xi, \eta}(x, y - x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x)} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda y}$$

$$F_{\xi, \eta}(z) = \int_0^z \int_0^{z-x} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda(z-x)}) dx = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$$

$$p_{\xi, \eta}(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_{\xi, \eta}(z) = \lambda \cdot e^{-\lambda z} - \lambda \cdot e^{-\lambda z} + \lambda^2 z e^{-\lambda z} = z \lambda^2 e^{-\lambda z} \quad (z > 0)$$

$$\text{Тогда } E(\xi \mid \xi + \eta = s) = \int_0^s x \cdot \frac{p_{\xi, \eta}(x, s-x)}{p_{\xi+\eta}(s)} dx = \int_0^s x \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda s}}{\lambda^2 s e^{-\lambda s}} dx = \int_0^s \frac{x}{s} dx = \frac{s}{2}$$

$\xi \in [0, s], \text{ если } \xi + \eta = s$

Тогда $E(\xi \mid \xi + \eta) = \frac{\xi + \eta}{2}$

Корректны ли определения дискр. и абс. непрерывного случайн. величин, если отталкиваться от определения, данного на стр 24?

Использовать с осторожностью!

Дискретный случай: а) $E(\xi|\eta)$ измерима относительно $\sigma(\eta)$?

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \{b_i : (\sum_{j=1}^{\infty} a_j P(\xi=a_j | \eta=b_i)) \in B\} \subset \sigma(\eta)$$

(а другую сторону $E(\xi|\eta) \in \mathcal{B}$ нет).

$$б) \forall A \in \sigma(\eta) \quad E(E(\xi|\sigma(\eta)) \cdot \mathbb{1}_A(\omega)) = E(\xi \cdot \mathbb{1}_A(\omega)) \quad ?$$

(нужно рассмотреть подробно, насколько это правильно)

$$\sum_{\omega \in A} E(\xi|\sigma(\eta))(\omega) \cdot P(\omega) =$$

$$\mathbb{1}_A(\omega)$$

это - с.в., зависящая от ω
здесь $\omega = \{\eta=b_i\}$

(группировка)

$$= \sum_{b_i \in A_1} E(\xi|\eta=b_i) \cdot P\{\eta=b_i\} =$$

$$A_1 = \{b_i : \eta(\omega)=b_i, \omega \in A\} \quad E(\xi|\sigma(\eta))(\omega)$$

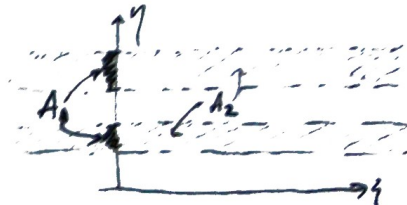
$$= \sum_{b_i \in A_1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{P\{\xi=a_j, \eta=b_i\}}{P\{\eta=b_i\}} P\{\eta=b_i\} =$$

$$P\{\xi=a_j | \eta=b_i\}$$

$$\sum_{\omega \in A_2} \xi(\omega) \cdot P(\omega) =$$

т.к. $A \in \sigma(\eta)$ $\omega \in A$ означает, что η принимает значение b_i . Но при этом ξ может принимать любое значение a_j с вероятностями $P\{\xi=a_j, \eta=b_i\}$ и здесь $\omega = \{\xi=a_j, \eta=b_i\}$

$$= \sum_{b_i \in A_1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j P\{\xi=a_j, \eta=b_i\}$$



Видно, что для расчета $\sum_{\omega \in A} \xi(\omega) \cdot P(\omega)$ нужно только $\omega \in A = \eta^{-1}(A_1)$ т.к. $E(\xi|\sigma(\eta))$ измерима относительно $\sigma(\eta)$

Но ξ не всегда измерима от η . η — случайный результат эксперимента
Вспомогательное $\omega \in \bar{\xi}^{-1}(A_2)$
где $\bar{\xi}$ — случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi, \eta)$

(абс. непрерывный случай рассмотрим позже, но, кажется, там должно быть что-то примерно то же самое с заменой Σ на $\int$ и P на p (плотность вероятности))

Программа курса «Теория вероятностей и математическая статистика»

лектор В.Ю.Королев

Теория вероятностей.

- 1) стр 1-2 Вероятностное пространство. Операции над событиями. Свойства вероятности.
- 2) стр 3 Условная вероятность. Независимость событий. Критерий независимости.
- 3) стр 4 Формула полной вероятности. Формула Байеса.
- 4) стр 5-6 Случайная величина. Порожденное и индуцированное вероятностные пространства. Функция распределения, ее свойства.
- 5) стр 6-7 Дискретные, сингулярные и абсолютно непрерывные функции распределения и случайные величины. Плотность распределения. Теорема Лебега о разложении функции распределения.
- 6) стр 8 Числовые характеристики случайных величин: моменты, математическое ожидание, дисперсия. Их свойства.
- 7) стр 9 Числовые характеристики случайных величин: квантили. Медиана и ее свойства. Интерквартильный размах.
- 8) стр 9-10-11 Испытания Бернулли. Биномиальное распределение. Теорема Пуассона. Распределение Пуассона.
- 9) стр 9-10-11 Испытания Бернулли. Геометрическое распределение. Теорема Реньи. Показательное распределение.
- 10) стр 9-10-11 Испытания Бернулли. + Теорема Муавра—Лапласа. Нормальное распределение.
- 11) стр 14-15 Совокупности случайных величин. Совместная функция распределения. Независимость случайных величин. Критерии независимости. Ковариация, коэффициент корреляции.
- 12) стр 16-18 Виды сходимости последовательностей случайных величин.
- 13) стр 19 Неравенства Маркова, Чебышева и Гаусса. Правило «трех сигм». Закон больших чисел в форме Чебышева.
- 14) стр 20-21 Характеристические функции и их свойства.
- 15) стр 22 Закон больших чисел в форме Хинчина.
- 16) стр 23 Центральная предельная теорема.
- 17) стр 24-27 Условное математическое ожидание.

Математическая статистика.

- 1) Статистическая структура. Выборка. Статистика. Порядковые статистики. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения.
- 2) Выборочные моменты. Их свойства.
- 3) Точечная оценка. Несмещенность, состоятельность, оптимальность. Теорема о единственности оптимальной оценки.
- 4) Функция правдоподобия. Достаточные статистики, полные статистики.